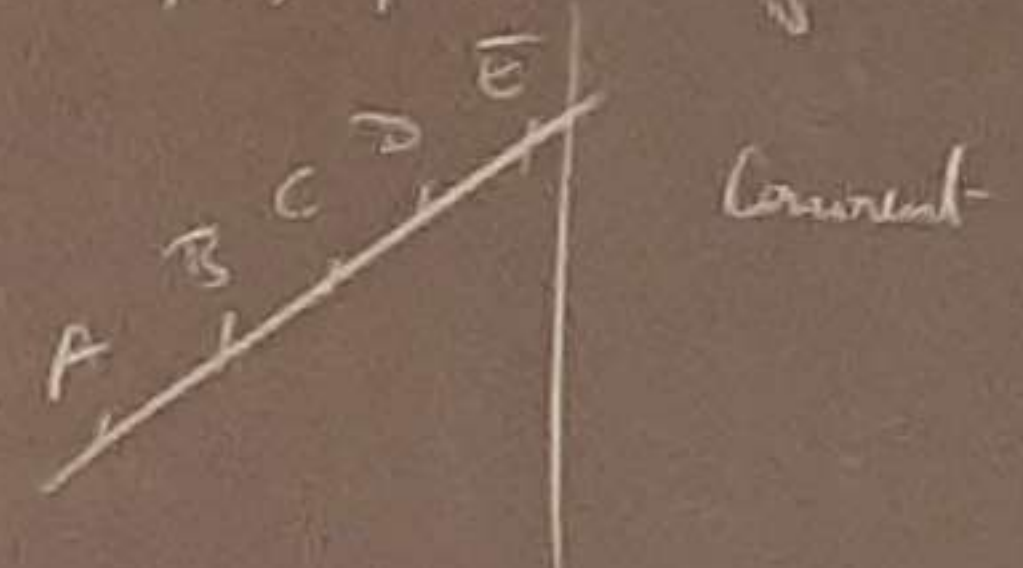


Prop Des A, B, C, D, E distincts du plan, forme une courbe -
Elle est unique, m, 4 points parmi les 5 ne sont jamais alignés.
Elle est dégénérée, m, 3 points parmi les 5 ne sont jamais alignés.

1 Existence

$\hookrightarrow A, B, C, D, E$ alignés.



Supposons le contraire. SPG,

$\mathcal{R}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère.

En coordonnées barycentriques dans $\mathcal{R}$
une courbe a pour eq. $= (A, B, C)$

$$pX + qY + rZ + \lambda X^2 + \mu Y^2 + \nu Z^2 = 0$$

Une courbe $\Rightarrow A, B, C$ a deux pour eq.

$$pX + qY + rZ = 0$$

$$\text{Notons } D = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

On considère le système d'équations (p, q, r)

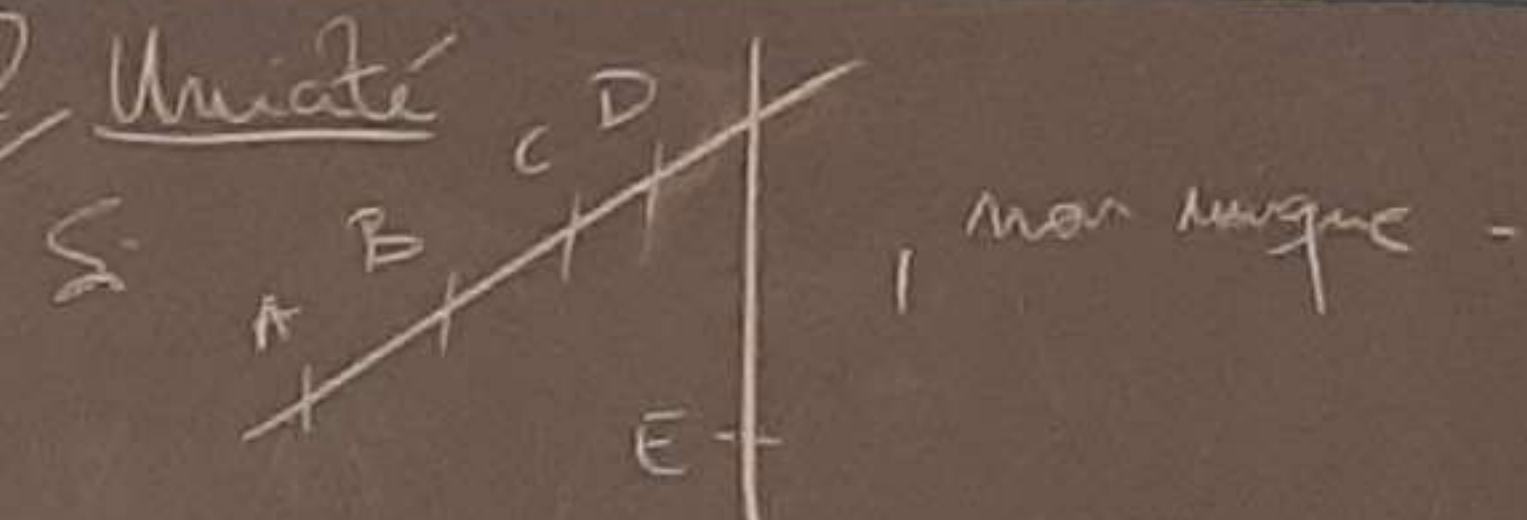
$$\begin{cases} p x_1 y_1 + q x_1 z_1 + r y_1 z_1 = 0 \\ p x_2 y_2 + q x_2 z_2 + r y_2 z_2 = 0 \end{cases}$$

de matrice M .

On a. $\text{rg}(M) \leq 2$ d'où par th. du rang $\dim \ker(M) \geq 1$, d'où l'existence.

la dimension 3

2 Unicité



Si on montre que $\dim(\ker(M)) = 1$.
Supposons $\text{rg}(M) < 2$. Ceci équivaut à :

$$\begin{vmatrix} x_1 y_1 & x_1 z_1 \\ x_2 y_2 & x_2 z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 y_1 & y_1 z_1 \\ x_2 y_2 & y_2 z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 y_1 & z_1 z_1 \\ x_2 y_2 & z_2 z_2 \end{vmatrix} = 0$$

ou encore.

$$x_1 z_2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = z_1 z_2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = y_1 y_2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0$$

1^{er} cas D, E ne forment pas une même droite $(AB), (AC), (BC)$.

Alors $x_1 y_1 z_1 x_2 y_2 z_2 \neq 0$.

Alors d'après le th. de det. 3×3 normale, i.e.

$$\begin{cases} A, D, E \text{ alignés} \\ B, D, E \text{ alignés} \\ C, D, E \text{ alignés} \end{cases}$$

d'où A, B, C, D, E alignés, exclu.

2^{es} cas SPG, $D \in (AB)$,

soit $z_1 = 0$. Or $x_1 y_1 \neq 0$, car $D \notin A, B$.

Or $x_1 z_2 y_1 z_2 = 0$ d'où $x_2 z_2 = 0$

et $y_1 y_2 x_1 z_2 = 0$ d'où $y_2 z_2 = 0$

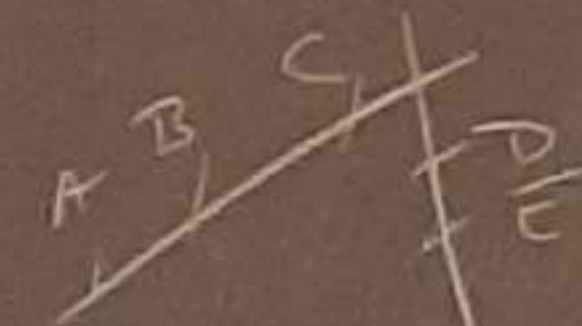
Si $z_2 \neq 0$, $x_2 = y_2 = 0$ d'où

$E = C$, exclu. Donc $z_2 = 0$

$\hookrightarrow E \in (AB)$, d'où A, B, D, E alignés.

3 Non-dégénérescence

Si 3 points sont alignés, $C \in D$
donc $C = D \cup D$ est dégénérée.



Réciproquement, la matrice de $\mathcal{C}$

$$\text{est } S = \begin{pmatrix} 0 & p & q \\ p & 0 & r \\ q & r & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où } \det(S) = -p \begin{vmatrix} p & r \\ q & 0 \end{vmatrix} + q \begin{vmatrix} p & 0 \\ q & r \end{vmatrix}$$

$$\det(S) = 2pqr.$$

Si $pqr = 0$, alors $p = 0$,

$$\text{c. } (qX + rY)Z = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} qX + rY = 0 \\ Z = 0 \end{cases}$$

qui n'est pas une équation de droite.
On $(q, r) \neq (0, 0)$.

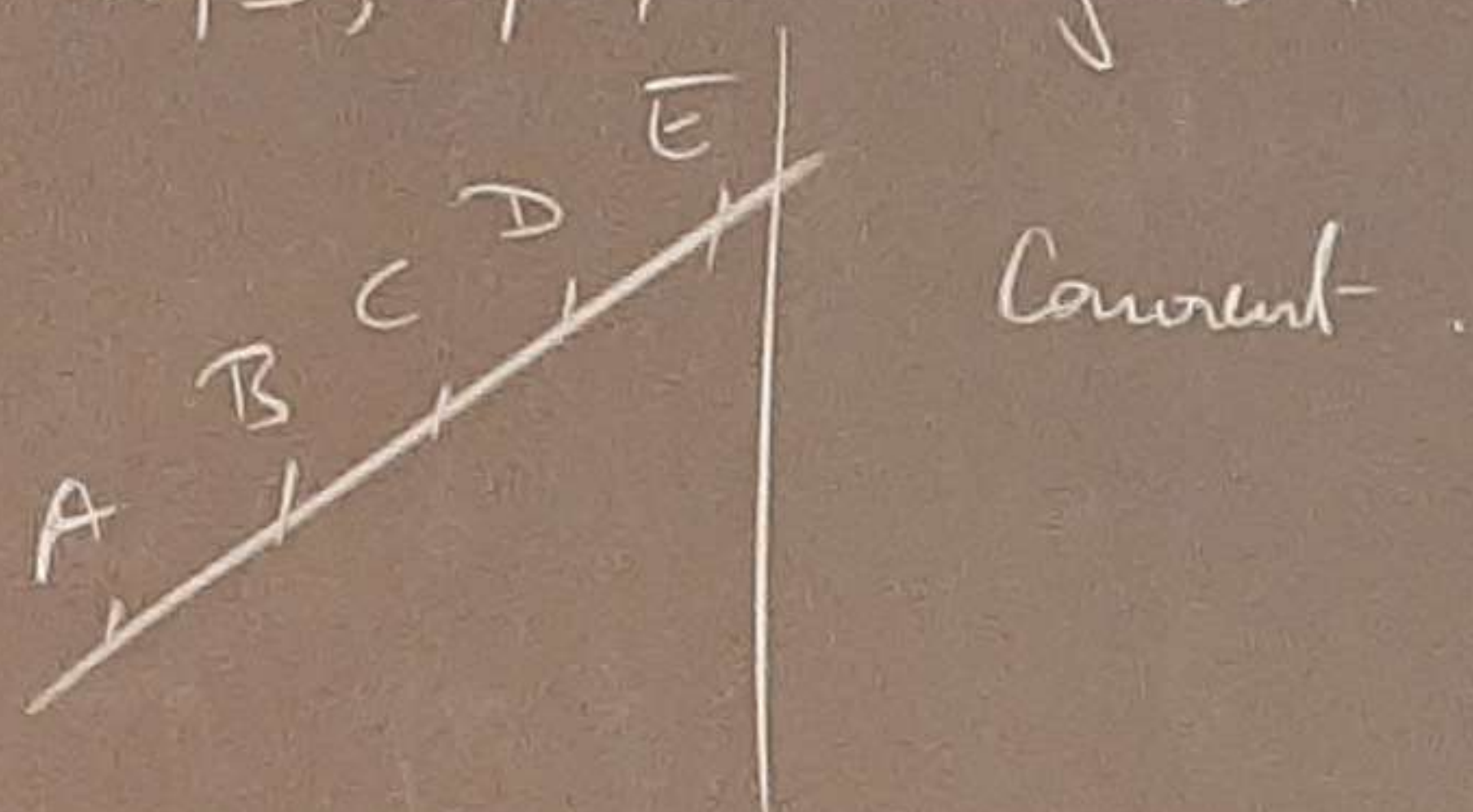
Prop Par A, B, C, D, E distincts du plan, passe une conique -

Elle est unique, m, 4 points parmi les 5 ne sont jamais alignés

Elle est non dégénérée, m, 3 parmi les 5 ne sont jamais alignés.

1 Existence

Si A, B, C, D, E alignés :



Supposons le contraire. SPC,

$R(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère.

En coordonnées barycentriques dans $R = (A, B, C)$
une conique a pour eq :

$$pXY + qXZ + rYZ + \lambda X^2 + tY^2 + uZ^2 = 0$$

Une conique $\Rightarrow A, B, C$ a deux pour eq :

$$pXY + qXZ + rYZ = 0$$

$$\text{Notons } D = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

On considère le système d'équations (p, q, r)

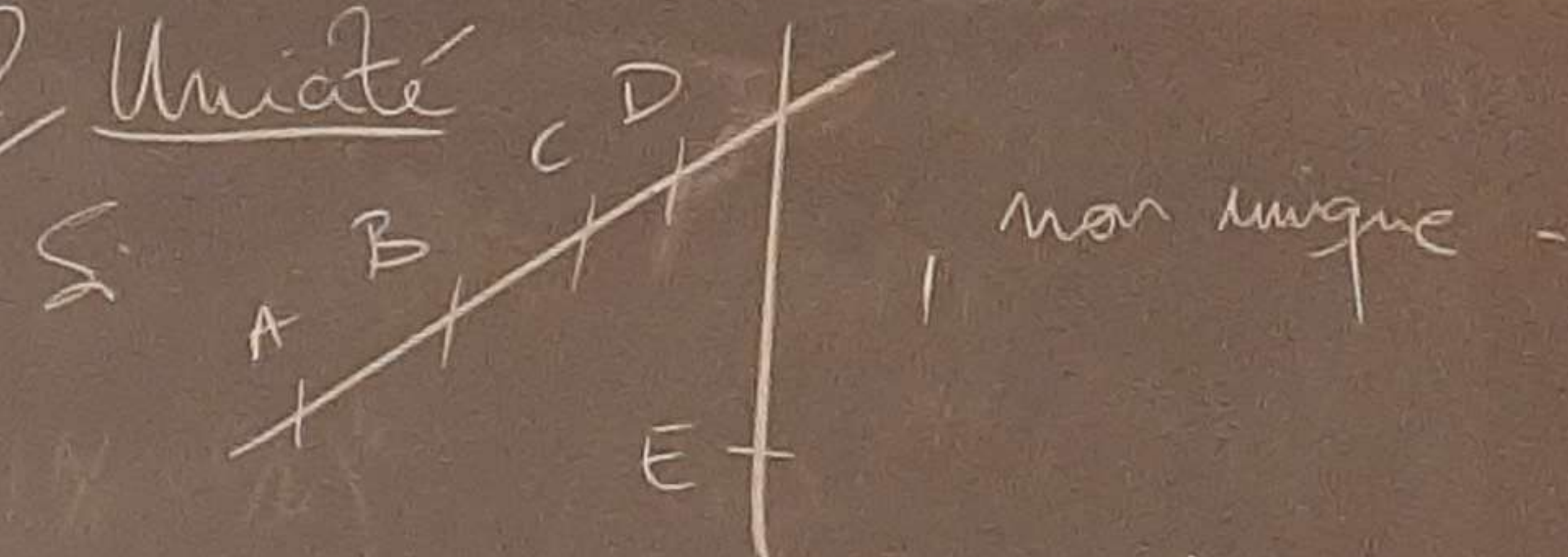
$$\begin{cases} p x_1 y_1 + q x_1 z_1 + r y_1 z_1 = 0 \\ p x_2 y_2 + q x_2 z_2 + r y_2 z_2 = 0 \end{cases}$$

de matrice M .

On a. $\text{rg}(M) \leq 2$ d'où par th. du rang $\dim \ker(A) \geq 1$, d'où l'existence.

en dimension 3

2 Unicité



Si on montre que $\dim(\ker(A)) = 1$.
Supposons $\text{rg}(A) < 2$. Ceci équivaut à :

$$\begin{vmatrix} x_1 y_1 & x_1 z_1 \\ x_2 y_2 & x_2 z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 z_1 & y_1 z_1 \\ x_2 z_2 & y_2 z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 y_1 & y_1 z_1 \\ x_2 y_2 & y_2 z_2 \end{vmatrix} = 0$$

ou encore :

$$x_1 x_2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = z_1 z_2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = y_1 y_2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0$$

Par les D, E ne forment ni aucune des droites $(AB), (AC), (BC)$.

Alors
Avec des
nombres,

d'où A, B

2^e cas

not $z_1 = 0$

On $x_1 z_2 y_1$

et $y_1 y_2 x_1$

Si $z_2 \neq 0$

$E = C$, e

d $E \in (AB)$

unique -

$$\mu(A) = 1 -$$

Ceci équivaut à :

$$\begin{vmatrix} x_1 y_1 & y_1 z_1 \\ x_2 y_2 & y_2 z_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} = y_1 z_1 \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} = y_2 z_2 = 0$$

et une autre

(B), (A), (B).

$$\text{Alors } x_1 y_1 z_1 x_2 y_2 z_2 \neq 0.$$

Alors chacun des trois det. 3×3 n'est nul, i.e.

$$\begin{cases} A, D, E \text{ alignés} \\ B, D, E \text{ " } \\ C, D, E \text{ " } \end{cases}$$

d'où A, B, C, D, E alignés, exclu.

2^e cas SPG , $D \in (AB)$,

soit $z_1 = 0$. Or $x_1 y_1 \neq 0$, car $D \notin A, B$.

$$\text{Or } x_1 x_2 y_1 z_2 = 0 \text{ d'où } x_2 z_2 = 0$$

$$\text{et } y_1 y_2 x_1 z_2 = 0 \text{ d'où } y_2 z_2 = 0$$

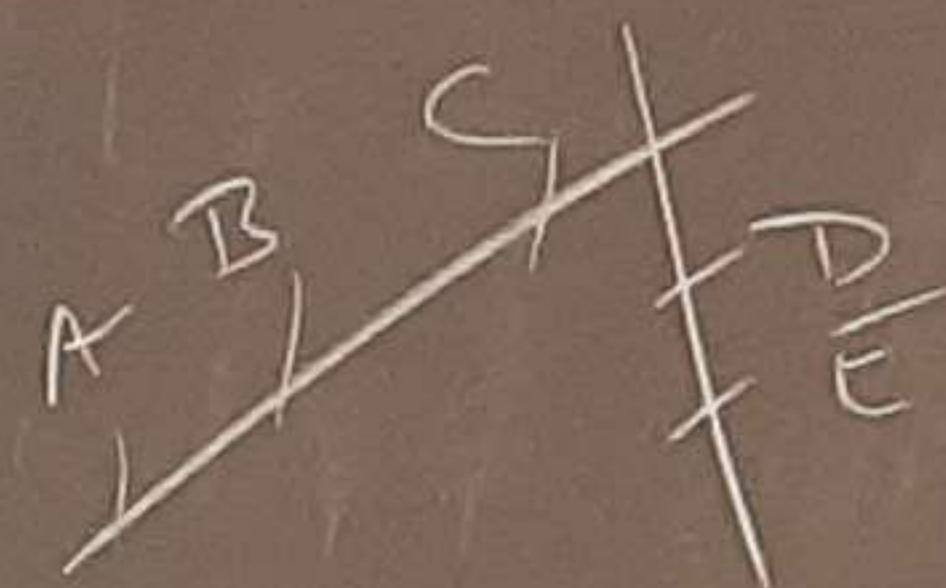
Si $z_2 \neq 0$, $x_2 = y_2 = 0$ d'où

$$E = C, \text{ exclu. Donc } z_2 = 0$$

et $E \in (AB)$, d'où A, B, D, E alignés.

3/ Non-dégénérescence -

Si 3 points sont alignés, $\mathcal{C} \supset \mathcal{D}$
donc $\mathcal{C} = \mathcal{D} \cup \mathcal{D}'$ est dégénérée



Réciproquement, la matrice de $\mathcal{C}$ n'est

$$S = \begin{pmatrix} 0 & p & q \\ p & 0 & n \\ q & n & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où } \det(S) = -p \begin{vmatrix} p & n \\ q & 0 \end{vmatrix} + q \begin{vmatrix} p & 0 \\ q & n \end{vmatrix}$$

$$\det(S) = 2pqn.$$

Si $pqn = 0$, d'où $p = 0$,

$$\mathcal{C}: (qx + ny)z = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} qx + ny = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

qui sont deux équations de droite,
Car $(q, n) \neq (0, 0)$.